

LAHENDUSED 11.KLASS

- 1. Vastus:** Kaubarongi kiirus on 50 km/h, reisirongi kiirus 80 km/h ja kiirrongi kiirus 100 km/h.

Lahendus:

Tähistame teepikkuse s km ja kaubarongi kiiruse x km/h. Siis reisirongi kiirus on $\frac{8x}{5}$ km/h ja kiirrongi kiirus $x+50$ km/h.

Avaldame ajad, mis neil rongidel kulub kahe linna läbimiseks:

Kaubarongil $\frac{s}{x}$, reisirongil $\frac{5s}{8x}$ ja kiirrongil $\frac{s}{x+50}$ tundi. Vastavalt tekstile saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} \frac{s}{x} - \frac{s}{x+50} = 4 \\ \frac{5s}{8x} - \frac{s}{x+50} = 1 \end{cases}$$

Jagades võrandid läbi muutujaga $s \neq 0$, saame

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+50} = 4 \cdot \frac{1}{s} \\ \frac{5}{8x} - \frac{1}{x+50} = \frac{1}{s} \end{cases}$$

Asendades esimeses võrrandis $\frac{1}{s}$, saame võrandi

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+50} = 4 \cdot \left(\frac{5}{8x} - \frac{1}{x+50} \right), \text{ mille lahendiks on } x = 50.$$

Seega kaubarongi kiirus on 50 km/h, reisirongi kiirus 80 km/h ja kiirrongi kiirus 100 km/h.

Hindamine:

Rongide sõiduaegade avaldamine	1p
Võrrandisüsteemi koostamine	2p
Võrrandisüsteemi lahendamine	3p
Rongide kiiruste leidmine	1p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p.

2. Vastus: $x \in [-5; -1) \cup (6; \infty)$.

Lahendus:

Esimene võrratus on samaväärne võrratusega $x^3(x-5)(x+5) \geq 0$. Et avaldise $x^3(x-5)(x+5)$ nullkohad on -5 , 0 ja 5 ning x^3 ja x on alati samamärgilised, on vaadeldav avaldis mittenegatiivne piirkondades $[-5; 0]$ ja $[5; \infty)$.

Teine võrratustest on samaväärne võrratusega $(5x - x^2 - 7)(x + 7)(x^2 - 5x - 6) < 0$.

Kuna võrrandil $5x - x^2 - 7 = 0$ puuduvad reaalarvulised lahendid on $5x - x^2 - 7 < 0$ mistahes reaalarvu x korral. Et korrutises on üks tegureist negatiivne, siis korrutis ise on negatiivne parajasti siis, kui teine tegur on positiivne. Seega on teine võrratustest samaväärne võrratusega $(x + 7)(x^2 - 5x - 6) > 0$. Lahutades ruutliikme tegureiks, tuleb meil lahendada võrratus $(x + 7)(x + 1)(x - 6) > 0$. Leidnud avaldise nullkohad -7 , -1 ja 6 , asuvad viimase võrratuse lahendid piirkondades $(-7; -1)$ ja $(6; \infty)$.

Jääb üle leida kahe võrratuse lahendipiirkondade ühisosa, milleks on $[-5; -1) \cup (6; \infty)$.

Hindamine:

Esimese võrratuse lahendipiirkondade leidmine	2p
Teise võrratuse lahendipiirkondade leidmine	3p
Süsteemi lahendipiirkondade leidmine	2p

3. Vastus: b) $|\cos x - \cos y|$; c) näiteks $x = 0$ ja $y = \pi$.

Lahendus:

Kasutades trigonomeetria põhiseoseid, hindame vahet

$$\begin{aligned} f(x; y) - g(x; y) &= (1 - \cos x \cdot \cos y)^2 - \sin^2 x \cdot \sin^2 y = \\ &= 1 - 2\cos x \cdot \cos y + \cos^2 x \cdot \cos^2 y - (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y) = \\ &= 1 - 2\cos x \cdot \cos y + \cos^2 x \cdot \cos^2 y - 1 + \cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 x \cdot \cos^2 y = (\cos x - \cos y)^2 \end{aligned}$$

Näeme, et sõltumata reaalarvudest x ja y on uuritav vahe võrdne ühe reaalarvu ruuduga, mis on alati mittenegatiivne ja ütleb, et $f(x; y) \geq g(x; y)$, m.o.t.t.

b) Eelmises osas näidatu põhjal saame, et

$$\sqrt{f(x; y) - g(x; y)} = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2} = |\cos x - \cos y|.$$

a) Kuna $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, siis avaldise $|\cos x - \cos y|$ suurim väärtus saab olla 2 ja see on võimalik, kui näiteks $x = 0$ ja $y = \pi$.

Hindamine:

Vahe $f(x, y) - g(x, y)$ lihtsustamine	2p
Võrratuse $f(x; y) \geq g(x; y)$ tõestamine	2p
Avaldise $\sqrt{f(x; y) - g(x; y)}$ lihtsustamine	2p
Näite toomine	1p

4. Vastus: $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

Lahendus:

Tähistame lõikude pikkused $BM = 2x$,
 $MC = 3x$ ja $AB = DC = y$.

Kuna $\angle A = 45^\circ$, siis $\angle B = 135^\circ$ ning kolnurgast ABM saame koosinusteoreemi abil

$$AM^2 = (2x)^2 + y^2 - 2 \cdot 2x \cdot y \cdot \cos 135^\circ = 4x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{2}.$$

Sarnaselt kolmnurgast MCD saame

$$MD^2 = (3x)^2 + y^2 - 2 \cdot 3x \cdot y \cdot \cos 45^\circ = 9x^2 + y^2 - 3xy\sqrt{2}.$$

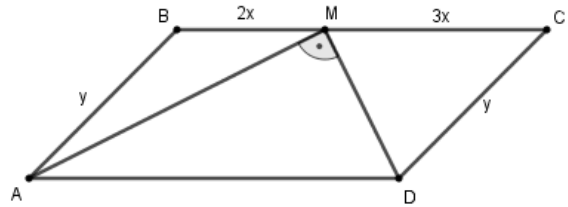
Kuna kolmnurk AMD on täisnurkne, kehtib Pythagorase teoreem $AM^2 + MD^2 = AD^2$, ehk

$4x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{2} + 9x^2 + y^2 - 3xy\sqrt{2} = (5x)^2$, millest $12x^2 - 2y^2 + xy\sqrt{2} = 0$. Jagame võrrandi läbi $-x^2$ -ga, ($-x^2 \neq 0$) ning saame ruutvõrrandi $\frac{y}{x}$ suhtes:

$$2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \sqrt{2} \cdot \frac{y}{x} - 12 = 0$$

Seega $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4 \cdot 2 \cdot 12}}{4} = \frac{\sqrt{2} \pm 7\sqrt{2}}{4}$. Ainsa lahendina sobib $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}$ ning

lähiskülgede pikkuste jagatis on $\frac{y}{5x} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$



Hindamine:

Õige joonis ja vajalike lõikude tähistamine	1p
MD^2 ja AM^2 avaldamine	2p
Pythagorase teoreemi kasutamine kolmnurgas AMD ja võrrandini koostamine	1p
Saadud võrrandi lahendamine $\frac{y}{x}$ suhtes	2p
Lähiskülgede suhte leidmine	1p

5. Vastus: : a) (6; 2) b) läände

Lahendus:

Vormistame esimese osa lahenduse tabeli kujul. Paneme tähele, et kui robot astub punktist $P(x; y)$ ühe sammu itta, siis jõuab ta punkti $B(x + 1; y)$, kui astub põhja, siis jõuab punkti $C(x; y + 1)$, kui astub läände, siis punkti $D(x - 1; y)$, kui astub lõunasse, siis punkti $E(x; y - 1)$.

a) Samm	algus	suund	lõpp	$x - y$	jääk	pööre	suund
1	(4; 0)	itta	(5; 0)	5	1	vasakule	põhja
2	(5; 0)	põhja	(5; 1)	4	0	vasakule	läände
3	(5; 1)	läände	(4; 1)	3	3	paremale	põhja
4	(4; 1)	põhja	(4; 2)	2	2	paremale	itta
5	(4; 2)	itta	(5; 2)	3	3	paremale	lõunasse
6	(5; 2)	lõunasse	(5; 1)	4	0	vasakule	itta
7	(5; 1)	itta	(6; 1)	5	1	vasakule	põhja
8	(6; 1)	põhja	(6; 2)	4	0	vasakule	läände
9	(6; 2)	läände	(5; 2)	3	3	paremale	põhja
10	(5; 2)	põhja	(5; 3)	2	2	paremale	itta
11	(5; 3)	itta	(6; 3)	3	3	paremale	lõunasse
12	(6; 3)	lõunasse	(6; 2)				

Oleme näidanud, et 12 sammuga jõuab robot punkti $Q(6; 2)$.

b) Teisele küsimusele vastuse leidmiseks võib ju eelnevat tabelit jätkata ja nii ka vastuseni jõuda. Lühema tee leiame aga siis, kui paneme tähele, et robot liigub kuuesammuliste tsüklitega, sest tema liikumiste suundade muster hakkab korduma (itta, põhja, läände, põhja, itta, lõunasse).

Selle tsükli lõpuks on robot nii ida kui ka põhja suunas edasi liikunud 1 ühiku võrra. Seda kinnitavad ka tabeli andmed, sest esimese kuue sammuga jõuab robot punktist $A(4; 0)$ punkti $F(5; 1)$ ja järgneva kuue sammuga punkti $Q(6; 2)$. Kui meid huvitab roboti 51. samm, siis sellele eelnev tsükkel lõppeb 48. sammuga ning 51. samm on uues tsüklis kolmas samm. Kolmanda sammuga aga astub robot lääne suunas.

Hindamine:

- | | |
|---|----|
| a) Antud lõpp-punkti koordinaadid (6; 2) | 2p |
| Lisatud selged ja hästijälgitavad põhjendused sõltumata meetodist (tabel, graafik, tsükkel) | 2p |
| b) Leitud suund ja antud vajalikud selgitused | 3p |